枠付き空間曲線論における螺旋およびマンハイム曲線の一般化

著者	山田 敦貴
発行年	2018
URL	http://hdl.handle.net/10236/00027928

2018 年度　修士論文要旨

枠付き空間曲線論における螺旋およびマンハイム曲線の一般化

関西学院大学大学院理工学研究科
数理科学専攻　黒瀬研究室　山田敦貴

古典的空間曲線論では速度ベクトルと加速度ベクトルが常に 1 次独立な曲線しか統一的に扱えないという制限があった。この制限なしに空間曲線を統一的に扱えるようにした理論の一つが枠付き曲線の理論 ([1]) である。本研究では、この理論の観点から古典的空間曲線論で調べられてきた螺旋およびマンハイム曲線を研究し、それらを枠付き曲線論において一般化した。

1　枠付き曲線

なめらかな写像 $\boldsymbol{p}: I \to \mathbb{R}^3$ と、$\boldsymbol{p}$ に沿う互いに直交する単位ベクトル場 $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2 : I \to \mathbb{R}^3$ の組 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ が I 上の**枠付き曲線**であるとは、$\boldsymbol{p}'(t) \cdot \boldsymbol{\nu}_1(t) = \boldsymbol{p}'(t) \cdot \boldsymbol{\nu}_2(t) = 0$ $(t \in I)$ を満たすことである。このとき、$\boldsymbol{\nu}_3(t) := \boldsymbol{\nu}_1(t) \times \boldsymbol{\nu}_2(t)$ とおき、枠付き曲線 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ の**曲率** (l, m, n, α) を

$$l(t) := \boldsymbol{\nu}_1'(t) \cdot \boldsymbol{\nu}_2(t),\ m(t) := \boldsymbol{\nu}_1'(t) \cdot \boldsymbol{\nu}_3(t),\ n(t) := \boldsymbol{\nu}_2'(t) \cdot \boldsymbol{\nu}_3(t),\ \alpha(t) := \boldsymbol{p}'(t) \cdot \boldsymbol{\nu}_3(t)$$

と定義する。

2　枠付き螺旋

枠付き曲線論の観点から、螺旋の一般化を考え、以下の定義を与えた。

定義 2.1 I 上の枠付き曲線 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ が**枠付き螺旋**であるとは、ある定数 $A, B \in \mathbb{R},\ A > 0$ が存在して

$$\begin{cases} \big(m(t)\big)^2 + \big(n(t)\big)^2 = A\big(\alpha(t)\big)^2 \\ l(t)\left\{\big(m(t)\big)^2 + \big(n(t)\big)^2\right\} + n'(t)m(t) - m'(t)n(t) = B\alpha(t)\left\{\big(m(t)\big)^2 + \big(n(t)\big)^2\right\} \end{cases}$$

が成り立つことである。

螺旋は勝手な枠 $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ について、枠付き螺旋である。また、次の定理が成り立つ。

定理 2.2 I 上の枠付き曲線 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ に対して、定数 $A, B \in \mathbb{R}, A > 0$ と I 上のある C^∞ 級関数 θ が存在して

$$m(t) = -\sqrt{A}\alpha(t)\cos\theta(t), \quad n(t) = \sqrt{A}\alpha(t)\sin\theta(t), \quad l(t) - \theta'(t) = B\alpha(t)$$

を満たすとする。このとき、枠付き曲線 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ は枠付き螺旋であり、$\boldsymbol{p}$ の像は (1 つの) 螺旋に含まれる。

しかし、像が複数の螺旋をつなげたようになっている枠付き螺旋も存在する。本文で、そのような枠付き螺旋の例を与えた。

3　枠付きマンハイム曲線

枠付き曲線論の観点から、古典的空間曲線論におけるマンハイム曲線の一般化を考え、以下の定義と結果を得た。

定義 3.1 枠付き曲線 $F = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ に対して、$\boldsymbol{p}(t)$ を通り $\boldsymbol{\nu}_1(t)$ を方向ベクトルとする直線を F の t における**第 1 法線**とよぶ。I 上の 2 つの枠付き曲線 $F = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2), \widetilde{F} = (\widetilde{\boldsymbol{p}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2)$ が**共法線対**であるとは、$\boldsymbol{p}$ と $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ は異なる写像で、任意の $t \in I$ に対して、$\boldsymbol{\nu}_1(t) = \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1(t)$ が成り立ち、F の t における第 1 法線と $\widetilde{F}$ の t における第 1 法線が一致することである。

定義 3.2 I 上の枠付き曲線 $F = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ が**枠付きマンハイム曲線**であるとは、I 上の枠付き曲線 $\widetilde{F} = (\widetilde{\boldsymbol{p}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2)$ が存在して

(i) F と$\widetilde{F}$が共法線対である。

(ii) $\widetilde{\alpha}(t)\widetilde{m}(t) = 0 \quad (t \in I)$

を満たすことである。このとき、$\widetilde{F}$ を F の**枠付きマンハイム・メイト**という。

定理 3.3 I 上の枠付きマンハイム曲線 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ に対して、ある 0 でない定数 c が存在して

$$-\alpha(t)m(t) = c\left\{\bigl(m(t)\bigr)^2 + \bigl(l(t)\bigr)^2\right\} \quad (t \in I) \tag{3.1}$$

が成り立つ。

定理 3.4 I 上の枠付き曲線 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ に対して、ある 0 でない定数 c が存在して、(3.1) が成り立つとする。さらに、$\alpha(t) + cm(t) \neq 0\,(t \in I)$ が成り立つとき、枠付き曲線 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ は枠付きマンハイム曲線である。

定理 3.3 は古典的空間曲線論で知られているマンハイム曲線の曲率を用いた特徴づけの一般化になっている。

4　特別な枠付きマンハイム曲線

定義 4.1 I 上の枠付き曲線 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ が**定傾**であるとは、ある定ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3, |\boldsymbol{a}| = 1$ が存在して、$\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3$ がそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と常に一定の角をなすことである。

定傾な枠付きマンハイム曲線に対して、次の定理が成り立つ。

定理 4.2 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ を定傾な枠付きマンハイム曲線で、$(l(t), m(t), n(t)) \neq \boldsymbol{0}$ を満たすものとする。このとき、$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ は枠付き螺旋であるか、$\boldsymbol{p}$ はある平面に含まれる。

参考文献

[1] S. Honda and M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space, Adv. Geom., **16**(2016), 265–276.